Integración en álgebras de Abel

por

Juan Arias de Reyna Martínez (*)

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO D. DARÍO MARAVALL CASESNOVES

1. DEFINICIONES

El objeto del presente trabajo es completar mi anterior comunicación (1), en que planteábamos la equivalencia de los conceptos de función diferenciable y analítica definidos en álgebras de Abel.

Necesitamos integrar funciones definidas en un intervalo de $\mathbb{R}$ y con valores en un álgebra de Abel A. Podríamos usar la integral débil, pero sería necesario exigir alguna condición adicional a A. Por eso preferimos usar la teoría desarrollada en nuestra tesis. Esencialmente consiste ésta en la teoría desarrollada en Bourbaki, *Fonctions d'une variable réelle*, capítulo II, pero sustituyendo el espacio de Banach por un espacio localmente convexo.

Llamaremos arco diferenciable en un álgebra de Abel A a una aplicación $\gamma : [a, b] \to A$ continua, diferenciable y tal que

$$\gamma' : [a, b] \to \Omega$$

sea continua. (Suponemos por tanto que existe la derivada a la derecha en a y a la izquierda en b.)

Una aplicación $\gamma : [a, b] \to A$ se dirá arco diferenciable a trozos si es continua y existe una partición del intervalo $[a, b]$ tal que en cada subintervalo parcial la restricción de γ sea arco diferenciable.

(*) Dep. Teoría de Funciones. Univ. de Sevilla

Sea A un álgebra de Abel; $f : \Omega \to A$, una función continua definida en una región Ω de A; γ, un arco diferenciable a trozos $\gamma : [a, b] \to \Omega$. Entendemos por integral de f a lo largo de γ

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz$$

a la integral

$$\int_{a}^{b} f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt.$$

Integral tomada en el sentido definido en mi tesis, cor. de la prop. 32 y prop. 30.

A partir de ahora todos los arcos que aparezcan en una integral se supondrán diferenciables a trozos implícitamente.

Las propiedades ordinarias de la integral a lo largo de arcos son válidas aquí.

Sea

$$\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$$

una aplicación creciente sobre y diferenciable a trozos. Entonces

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = \int_{\gamma \circ \varphi} f(z)\, dz.$$

Por tanto, desde nuestro punto de vista, los dos arcos γ y $\gamma \circ \varphi$ son equivalentes. Es fácil probar formalmente que esto es una relación de equivalencia y a veces llamaremos arcos a los elementos del conjunto cociente. Podemos así siempre considerar que un arco está definido en el intervalo $[0, 1]$.

Podemos definir sin dificultad el concepto de arco opuesto a uno dado. Se tiene entonces

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = - \int_{-\gamma} f(z)\, dz$$

Basta aplicar las definiciones y los resultados ya probados para este tipo de integrales.

También es posible definir la suma de arcos y se obtiene el resultado

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_2} f(z)\, dz.$$

Usaremos con mucha frecuencia en este capítulo las funciones $f : \Omega \to A$ definidas en una región del álgebra de Abel A que son diferenciables en Ω y verifican en Ω las condiciones de Cauchy-Riemann. Aunque probaremos que coinciden con las analíticas, para distinguirlas mientras este resultado no esté probado las llamaremos funciones holomorfas.

Hemos visto que toda función analítica en Ω es holomorfa en Ω. Podemos dar ya una condición que relaciona el concepto de función holomorfa con la integración.

PROPOSICIÓN 1.—*Sea A un álgebra de Abel;* f $: \Omega \to A$, *una aplicación definida en una región* Ω *de A. Las dos condiciones siguientes son equivalentes si* f *es continua en compactos.*

a) f *es la diferencial de una función holomorfa* $F : \Omega \to A$.

b) *La integral de* f *a lo largo de un arco en* Ω *no depende más que de los extremos de* γ.

Además se tiene en ese caso si γ *es un arco de* a *hasta* b

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = F(b) - F(a).$$

En primer lugar, debemos aclarar que cuando hablamos de aplicaciones diferenciables siempre será en el sentido definido en Arias de Reyna J. (tesis). Al decir que f es la diferencial de F, estamos identificando los elementos de L A con los de A.

Probemos que a) $\Longrightarrow$ b). Supongamos que $\gamma : [\alpha, \beta] \to \Omega$ es un arco diferenciable a trozos tal que $\gamma(\alpha) = a$ y $\gamma(\beta) = b$ .Bastará probar que

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = F(b) - F(a).$$

para demostrar b).

Sabemos que $F \circ \gamma$ es continua en $[\alpha, \beta]$ y primitiva de

$$f(\gamma(t))\, \gamma'(t);$$

pues salvo en los puntos donde no es diferenciable γ que son en número finito, se tiene:

$$D(F \circ \gamma)(t)(1) = D F(\gamma(t)) \circ D\gamma(t)(1) = D F[\gamma(t)](\gamma'(t)).$$

Usando ahora las condiciones de Cauchy-Riemann y la hipótesis $a) = f(\gamma(t))\gamma'(t)$. Por tanto,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)) = F(b) - F(a).$$

Por último b) $\Longrightarrow$ a). Tomemos un punto fijo $a \in \Omega$. Para todo $z \in \Omega$, puesto que Ω es región, existe un arco diferenciable a trozos γ de extremos a y z. Pongamos

$$F(z) = \int_\gamma f(z)\,dz.$$

F es una aplicación de Ω en A, pues la integral por la hipótesis no depende de la elección de γ.

Debemos probar que F es holomorfa en Ω. Es decir, que es diferenciable en todo punto de Ω y

$$D F(b)(x) = f(b)\,x.$$

Sea γ un arco de b a $b + x$, evidentemente se tiene

$$F(b + x) - F(b) = \int_\gamma f(z)\,dz.$$

Por tanto,

$$F(b + x) - F(b) - f(b)\,x = \int_\gamma (f(z) - f(b))\,dz.$$

Considerando b fijo, debemos probar que la aplicación

$$x \longmapsto \int_\gamma (f(z) - f(b))\,dz$$

es un resto.

Probemos que es continua en compactos en b. Sea K un compacto en A que contenga a b. Tomemos un entorno de O en A, dado por una seminorma p y un $\varepsilon > 0$. Debemos encontrar un entorno U de b tal que

$$b + x \in \mathrm{U} \cap \mathrm{K} \Rightarrow p\left(\int_{\gamma} (f(z) - f(b))\, d\, z\right) < \varepsilon.$$

Sea $\bar{\Delta}$ un entorno de b $p_0(z - b) \leqslant r$ contenido en Ω. $\bar{\Delta}$ es cerrado en A. Sea $\mathrm{K}' = \bar{\Delta} \cap \mathrm{K}$. K′ es compacto en A y contiene a b. También lo es

$$\hat{\mathrm{K}} = \{ t\, x + b \mid b + x \in \mathrm{K}', \ t \in [0, 1] \};$$

por ser la imagen de un compacto por una aplicación continua. Además, $\mathrm{K} \cap \bar{\Delta} \subset \hat{\mathrm{K}}$.

Si $b + x \in \mathrm{K} \cap \bar{\Delta}$, podemos tomar en lugar de γ el segmento b, $b + x$, pues está contenido en Ω. Como $\hat{\mathrm{K}}$ es compacto, p tiene un máximo en $\hat{\mathrm{K}}$, sea M. Como f es continua en compactos, existe un entorno equilibrado V de b tal que

$$b + y \in \mathrm{V} \cap \hat{\mathrm{K}} \Rightarrow p\,(f(b + y) - f(b)) < \varepsilon/\mathrm{M}.$$

Sea ahora

$$b + x \in (\mathrm{V} \cap \bar{\Delta}) \cap \mathrm{K},$$

entonces

$$p\left(\int_{\gamma} (f(z) - f(b))\, d\, z\right) = p\left(\int_{0}^{1} (f(b + t\, x) - f(b))\, x\, d\, t\right)$$

$$\leqslant \int_{0}^{1} p\,(f(b + t\, x) - f(b))\, p\,(x)\, d\, t.$$

Usando las desigualdades anteriores, esto es, $\leqslant \varepsilon$.

Veamos ahora que $\lim (1/t)\, r\,(t\,x) = 0$ tomando el límite cuando $t \to 0$ y $x \in \mathrm{K}$. Usaremos la misma notación que antes.

Si $b + t\,x \in \bar{\Delta}$, se tiene

$$(1/t)\, r\,(t\,x) = (1/t) \int_0^1 f\,(b + \xi\, t\,x) - f\,(b)\, t\,x\, d\,\xi = \int_0^1 (f\,(b + \xi\, t\,x) - f\,(b))\, x\, d\,\xi.$$

Sea V el entorno equilibrado de b determinado como antes. Existe α tal que

$$0 < |\,t\,| < \alpha \quad \text{y} \quad b + x \in \mathrm{K} \Longrightarrow b + t\,x \in \mathrm{V} \cap \bar{\Delta}.$$

Entonces si $b + x \in \mathrm{K}$ y $|\,t\,| < \alpha$ para todo $|\,\xi\,| < 1$ se tiene

$$b + \xi\, t\,x \in \mathrm{V} \cap \bar{\Delta}.$$

Además

$$p\,((1/t)\, r\,(t\,x)) \leqslant \int_0^1 p\,(f\,(b + \xi\, t\,x) - f\,(b))\, p\,(x)\, d\,\xi \leqslant \epsilon/\mathrm{M} \cdot \mathrm{M} = \epsilon.$$

Con esto se tiene

$$\mathrm{F}\,(b + x) = \mathrm{F}\,(b) + f\,(b)\, x + r\,(x),$$

luego F es continua en compactos en b. Esto vale para todo $b \in \Omega$, luego r es continua en compactos en todo Ω. Queda así verificada la tercera condición impuesta a los restos, c. q. d.

2. Teorema de Cauchy

Comenzamos por una observación sobre la demostración del último teorema. Al probar que b) $\Longrightarrow$ a), sólo hemos necesitado parte de la hipótesis, de manera que de hecho hemos probado que b′) $\Longrightarrow$ a), donde b′) es la relación:

b′) La integral de f a lo largo de una poligonal en Ω no depende más que de los extremos de ésta.

Naturalmente, entendemos por poligonal una suma de segmentos.

Vamos a demostrar el teorema de Cauchy para regiones convexas. El camino que seguiremos consistirá en ver que si f es holomorfa en una región convexa verifica b′) y usar entonces la proposición 1 modificada como acabamos de indicar. El primer paso es, naturalmente, el triángulo.

Si a, b y c son tres elementos de un álgebra de Abel, entendemos por triángulo de vértices a, b y c el conjunto de los elementos de la forma $x\,a + y\,b + z\,c$ con x, y, z, números reales positivos o nulos tales que $x + y + z = 1$. Todo triángulo es evidentemente compacto. Si $T = (a, b, c)$ es el triángulo anterior, entendemos por borde de T, ∂T el arco $(a, b) + (b, c) + (c, a)$, donde (a, b) denota el segmento de a hasta b.

Proposición 2.—*Sea* f : $\Omega \rightarrow A$ *una función holomorfa, definida en una región* Ω *del álgebra de Abel* A. *Sea* T *un triángulo en* Ω ($T \subset \Omega$). *Entonces*

$$\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0.$$

Supongamos, por el contrario,

$$\int_{\partial T} f(z)\,dz \neq 0.$$

Existe entonces una seminorma p tal que

$$p\left(\int_{\partial T} f(z)\,dz\right) \neq 0.$$

Sea $T = (a, b, c)$. Pongamos entonces

$$T_1 = (a, (a+b)/2, (c+a)/2), \quad T_2 = ((a+b)/2, b, (b+c)/2),$$
$$T_3 = ((a+b)/2, (b+c)/2, (c+a)/2)$$

y por último

$$T_4 = ((c + a)/2, (b + c)/2, c.$$

Es trivial probar entonces que

$$\int_{\partial T} f(z)\, d = \int_{\partial T_1} f(z)\, d z + \int_{\partial T_2} f(z)\, d z + \int_{\partial T_3} f(z)\, d z + \int_{\partial T_4} f(z)\, d z.$$

Así, pues, existe $i = 1, 2, 3, 4$ tal que

$$p \left(\int_{\partial T_i} f(z)\, d z \right) \geqslant (1/4)\, p \left(\int_{\partial T} f(z)\, d z \right).$$

Sea uno de ellos T_i. Pongamos $T_i = T^1$. Por el mismo proceso aplicado a T^1 en lugar de a T obtenemos T^2 tal que

$$p \left(\int_{\partial T^2} f(z)\, d z \right) \geqslant (1/4)\, p \left(\int_{\partial T^1} f(z)\, d z \right).$$

Obtenemos así una sucesión

$$T \supset T^1 \supset T^2 \supset \dots \supset T^n \supset \dots$$

de triángulos tales que

$$p \left(\int_{\partial T^n} f(z)\, d z \right) \geqslant (1/4)^n\, p \left(\int_{\partial T} f(z)\, d z \right).$$

Usando los teoremas conocidos para acotar integrales, obtenemos para la integral de una función g en un triángulo $T = (a, b, c)$

$$p \left(\int_{\partial T} g(z)\, d z \right) \leqslant (p(b - a) + p(c - b) + p(a - c)) \sup p(g(z)).$$

Observemos que para $T^1 = (a', b', c')$ se tiene

$$p(b' - a') + p(c' - b') + p(a' - c') = (1/2)\,(p(b - a) + p(c - b) + p(a - c)).$$

Así, pues, si llamamos

$$1\,(T) = p\,(b - a) + p\,(c - b) + p\,(a - c)$$

se tiene

$$1\,(T^n) = (1/2)\,1\,(T^{n-1}) = \ldots = (1/2^n)\,1\,(T).$$

Como los T^n son compactos y no vacíos, existe $\alpha \in \bigcap T^n$, sea $h = f'(\alpha)$ que existe, pues f es holomorfa en Ω.

Sabemos que

$$\int_{\partial T} (f(\alpha) - f'(\alpha)(z - \alpha))\, d\,z = 0,$$

pues el integrando admite una primitiva en A. Así, pues,

$$p\left(\int_{\partial T} f(z)\, d\,z\right) \leqslant 4^n\, p\left(\int_{\partial T^n} f(z)\, d\,z\right) = 4^n\, p\left(\int_{\partial T^n} (f(z) - f(\alpha) - (z - \alpha)\, f'(\alpha))\, d\,z\right) \leqslant$$

$$\leqslant 4^n\, 1\,(T^n) \sup_{z \in T^n} p\,(f(z) - f(\alpha) - (z - \alpha)\, f'(\alpha)) \leqslant$$

$$\leqslant 2^n\, 1\,(T) \sup_{z \in T^n} p\,(f(z) - f(\alpha) - (z - \alpha)\, f'(\alpha)).$$

Dado $\varepsilon > 0$ y el compacto $T - \alpha$, existe t_0 tal que

$$|\,t\,| < t_0 \quad \text{y} \quad x + \alpha \in T \Rightarrow p\,((1/t)\,(f(\alpha + t\,x) - f(\alpha) - t\,x\,f'(\alpha))) < \varepsilon.$$

Por tanto, si $z \in T^n$,

$$p\,(f(z) - f(\alpha) - (z - \alpha)\, f'(\alpha)) \leqslant t\,\varepsilon,$$

siempre que exista $x \in T - \alpha$ tal que

$$\alpha + t\,x = z \quad \text{y} \quad |\,t\,| < t_0.$$

Sea $z \in T$; pongamos

$$k\,(z) = \inf\{\,t \mid (z - \alpha)/t \in T - \alpha \quad \text{y} \quad t > 0\,\};$$

esto define una función real en T.

Debemos encontrar el supremo r_n de $k(z)$ en T^n y se tendrá, si $z \in T^n$, que

$$p(f(z) - f(\alpha) - (z - \alpha) f'(\alpha)) \leqslant r_n \, \epsilon.$$

Pongamos

$$\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = \alpha \quad \text{con} \quad \lambda_i \geqslant 0 \quad \text{y} \quad \Sigma \lambda_i = 1.$$

Sea $z \in T$,

Decir que $t \geqslant k(z)$ equivale adecir

$$(1/t)(\mu_i - \lambda_i) + \lambda_i \geqslant 0.$$

Supongamos que

$$|\mu_i - \lambda_i| < \delta ;$$

esto implica que $k(z) \leqslant t$ para los t tales que

$$-(1/t)\,\delta + \lambda_i \geqslant 0,$$

si $\lambda_i > 0$. (Si algún λ_i se anula, la condición relativa a ese i se cumple siempre). Esto es para los $t \geqslant \delta/\lambda_i$.

Así, pues, para $|\mu_i - \lambda_i| < \delta$ es $k(z) \leqslant \delta/\lambda$, siendo λ el menor λ_i positivo.

Pero δ tiene un extremo superior en T^n; extremo que para T es 1, para T^1 es 1/2 y para T^n es $1/2^n$. Por tanto,

$$r_n = \sup_{z \in T^n} k(z) \leqslant 1/\lambda\, 2^n.$$

De aquí que

$$p\left(\int_{\partial T} f(z)\, dz\right) \leqslant 1\,(T)\,\epsilon/\lambda,$$

lo que es una contradicción, pues ϵ es arbitrario.

Debemos mejorar algo este teorema. Si G es una región en $\mathbb{C}$ sabemos que $\varphi^{-1}(G) = \Omega$ lo es en A. Sea G' una región obtenida de G quitando un número finito de puntos $t_1, t_2, \ldots, t_n$; llamemos Ω' a la región $\varphi^{-1}(G')$ de A. Queremos probar el teorema para una función holomorfa en Ω', pero para triángulos en Ω. El enunciado exacto es el siguiente:

PROPOSICIÓN 3.—*Sean* G *y* $G' = G - \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ *dos regiones en* $\mathbb{C}$; $\Omega\, \varphi^{-1}(G)$ *y* $\Omega' = \varphi^{-1}(G')$ *las regiones correspondientes en un álgebra de Abel* A. *Sea* $f : \Omega' \to A$ *una función holomorfa. Supongamos que para cada* $i = 1, 2, \ldots$ *existe* $\zeta_i \in A$ *tal que* $\varphi(\zeta_i) = t_i$ *y*

$$\lim_{z \to \zeta_i} (z - \zeta_i) f(z) = 0.$$

Entonces si T es un triángulo en Ω tal que ∂T esté en Ω', se tiene

$$\left(\int_{\partial T} f(z)\, dz \right) = 0.$$

La imagen por φ de T es un triángulo Δ en $\mathbb{C}$. Si Δ no contiene ningún t_i, T está contenido en Ω' y el teorema es consecuencia del anterior.

Podemos reducirnos al caso en que Δ no contenga más que un t_i. En efecto, si algún t_i está en Δ, Δ no puede reducirse a un segmento, pues no se tendría $\partial T \subset \Omega'$. Podemos entonces dividir Δ en triángulos de manera que cada uno contenga a lo más un t_i. Como ∂T no es un segmento, φ es biyectiva entre Δ y T. Podemos entonces dividir T en triángulos con la propiedad deseada $T_1, T_2, \ldots, T_n$ y

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\int_{\partial T_i} f(z)\, dz \right) = \int_{\partial T} f(z)\, dz.$$

Suponemos, pues, que $\Delta = \varphi(T)$ sólo contiene un t_i que llamaremos t.

Podemos simplificar todavía más la situación. Sabemos que existe $\zeta \in A$ con $\varphi(\zeta) = t$ tal que

$$\lim (z - \zeta) f(z) = 0.$$

Sean a, b y c los vértices de T. $\zeta = t + \eta$. Entonces $\varphi(\eta) = 0$. Sean además

$$\varphi(a) = \alpha, \ \varphi(b) = \beta, \ \varphi(c) = \gamma.$$

Pongamos

$$a' = \alpha + \eta, \ b = \beta + \eta, \ c' = \gamma + \eta.$$

Sea T′ el triángulo de vértices a', b' y c'. La proposición anterior asegura que

$$\int_{\partial T} f(z)\, d z = \int_{\partial T'} f(z)\, d z.$$

Pues las integrales sobre los triángulos de vértices (a', a, b'), (a, b, b'), etc., son iguales a cero.

Sea $h(\tau)$ la cuación de ∂ T′. S tiene

$$h(\tau) - \varphi(h(\tau)) = \eta,$$

pues

$$h(\tau) = \lambda_1 a' + \lambda_2 b' + \lambda_3 c' = \lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta + \lambda_3 \gamma + \eta \quad \text{y} \quad \varphi(\eta) = 0,$$

y tanto λ_i como α, β, γ y λ_i son números complejos.

Se tiene entonces

$$\int_{\partial T'} f(z)\, d z = \int_{m_1}^{m_2} f(h(\tau))\, h'(\tau)\, d \tau.$$

Llamemos g a la función $g(x) = f(x + \eta)$ que está definida y es holomorfa igual que f en Ω':

$$\int_{\partial T'} f(z)\, d\, z = \int_{m_1}^{m_2} g(h(\tau) - \eta)\, h'(\tau)\, d\, \tau = \int_{\partial T''} g(z)\, d\, z.$$

Donde T″ es el triángulo de vértices α, β y γ. Además, g verifica evidentemente la relación

$$\lim_{z \to t} (z - t)\, g(z) = 0.$$

Ahora se tiene T″ $= \Delta$, es decir, el arco toma valores complejos, lo que será de gran utilidad.

Consideremos un triángulo Δ' equilátero de centro t y de lado l suficientemente pequeño para que esté contenido en Δ. Dividiendo Δ en triángulos se obtiene fácilmente

$$\int_{\partial \Delta} g(z)\, d\, z = \int_{\partial \Delta'} g(z)\, d\, z.$$

Supongamos que no fuesen nulos; existiría una seminorma p tal que

$$p\left(\int_{\partial \Delta'} g(z)\, d\, z\right) > 0.$$

Tomemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario; existe un entorno de t tal que z pertenece a este entorno:

$$p\,(z - t)\, g(z)) < \varepsilon.$$

Entonces

$$p\left(\int_{\partial \Delta'} f(z)\, d\, z\right) = p\left(\int_{\partial \Delta'} (z - t)\, f(z)\, (1/(z - t))\, d\, z\right) \leqq$$

$$\leqslant \varepsilon \int_{m_1}^{m_2} \left|\frac{1}{h(\tau) - t}\right| h'(\tau)\, d\, \tau \leqslant \varepsilon \cdot 3 \cdot l.$$

Pues $h(\tau)$ y $h'(\tau)$ son complejos y esta integral es la longitud del arco.

Con esto queda demostrado el teorema. Obsérvese que directamente sin h no es complejo no podemos acotar

$$p\,(h'(\tau)/(h(\tau)-t)).$$

Podemos ya probar el teorema de Cauchy para regiones convexas.

PROPOSICIÓN 4.—*Sea A un álgebra de Abel; Ω, una región convexa de A;* $f : \Omega \to A$, *una función holomorfa. Para todo arco diferenciable a trozos y cerrado γ en Ω, se tiene*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

La conclusión del teorema equivale a decir que la integral de f a lo largo de un arco no depende más que de sus extremos. Observemos que gracias a la proposición 2 se cumple para f la condición b') enunciada antes que la proposición 2. Si tenemos en cuenta las consideraciones que hacíamos allí basta aplicar la proposición 1 para probar el teorema.

Debemos dar una forma modificada a este enunciado con el fin de obtener la fórmula de la integral de Cauchy.

PROPOSICIÓN 5.—*Sea A un álgebra de Abel; G, una región convexa de $\mathbb{C}$:*

$$G' = G - \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}.$$

Sean $\Omega = \varphi^{-1}(G)$ y $\Omega' = \varphi^{-1}(G')$ las correspondientes regiones en A. Sea $f : \Omega' \to A$ *una función holomorfa. Supongamos que para cada* t_i *existe un $\zeta_i \in A$ tal que $\varphi(\zeta_i) = t_i$ y se tenga*

$$\lim_{z \to \zeta_i} (z - \zeta_i)\, f(z) = 0.$$

Entonces, si γ es un arco diferenciable a trozos y cerrado en Ω', se tiene

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

Basta probar que se verifica $b')$. Es decir, que la integral de f a lo largo de una poligonal cerrada en Ω' es nula.

Sean $a_0, a_1, \ldots, a_n$ los vértices de γ.

Si los bordes de los triángulos

$$(a_0, a_1, a_2), (a_0, a_2, a_3), (a_0, a_3, a_4), \text{ etc...},$$

están en Ω'; el resultado es consecuencia directa de la proposición 1.

En caso contrario, será necesario descomponer de otro modo en triángulos.

Podemos siempre suponer los $a_i \in \mathbb{C}$. Transformando en caso contrario la poligonal γ en γ' de vértices

$$\varphi(a_0), \varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n).$$

Esto siempre puede hacerse (usando la proposición 3), pues los triángulos

$$(\varphi(a_i), \varphi(a_{i+1}), a_{i+1}) \quad \text{y} \quad (a_i, a_{i+1}, \varphi(a_i))$$

tienen sus bordes en Ω' por estar γ en Ω'.

No cabe duda de que en $\mathbb{C}$ es posible descomponer γ en triángulos que sigan estando en G′ y que γ sea la suma de ellos.

3. Aplicaciones del teorema de Cauchy

En primer lugar estudiaremos las propiedades de la función exponencial en un álgebra de Abel.

Llamaremos función exponencial en un álgebra de Abel A a la definida por el desarrollo en serie de potencias

$$e^z = \sum_{n \geq 0} z^n / n!$$

Como consecuencia de la proposición 14 (cap. I), la exponencial es función continua. Por la proposición 13 (cap. I) es analítica. Por último, por la proposición 16 (cap. I), la función exponencial es holomorfa.

Proposición 6.—*La función exponencial es un homomorfismo entre el grupo aditivo de A y el grupo multiplicativo $A^* = A - \mathcal{M}$ de A.*

Por la proposición 8 (cap. I) se tiene para z y w pertenecientes a A, $e^{(z+w)} = e^z e^w$. Además, directamente de la definición $e^0 = 1$, luego $e^z e^{-z} = e^0 = 1$. Esto es, $e^z \in A^*$ para todo $z \in A$.

Proposición 7.—*Si A es un álgebra de Abel, el núcleo del homomorfismo definido por la función exponencial* es $2\pi i \mathbb{Z}$.

La función g asociada a la exponencial según la proposición 12 (cap. I) y que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\exp"] \arrow[d, "\varphi"'] & A \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathbb{C} \arrow[r, "g"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

es la exponencial ordinaria. Si $a \in A$ es tal que $e^a = 1$, se tiene por tanto $e^{\varphi(a)} = 1$. Así, puee, $\varphi(a) \in 2\pi i \mathbb{Z}$. Si $a \neq 2\pi i k$ para todo k, *esto es*, $a \neq \varphi(a)$, se tendría $b = a - \varphi(a)$ tal que $b \neq 0$, $\varphi(b) = 0$ y $e^b = 1$. Sólo queda ver que si $\varphi(b) = 0$ y $e^b = 1$ se tiene $b = 0$.

Si $e^b = 1$, se tiene

$$b + b^2/2! + b^3/3! \dots = 0,$$

luego

$$b(1 + b^2/2! + b^2/3! + \dots) = 0.$$

Como

$$\varphi(1 + b/2! + b^2/3! + \dots) = 1,$$

si A es de integridad es $b = 0$. Pero esta demostración no sirve cuando A no es de integridad. Daremos, pues, una demostración diferente.

Consideremos las dos series de potencias

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}/n\,!$$

y

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} (b^n/n\,!)\, z^n,$$

donde

$$b_0 = 1,\ b_1 = 1/2,\ b_2 = 1/6,\ b_3 = 0, \ldots$$

son los número de Bernouilli. En cualquier álgebra de Abel, S tiene radio de convergencia ∞ y T tiene radio 2π. Además, S T = 1. Las dos convergen en b. Aplicando entonces la proposición 8 (capítulo I), se tiene

$$(1 + b/2\,! + b^2/3\,! + \ldots)\, T\,(b) = 1.$$

Multiplicando por b, queda

$$b = b\,1 = (b + b^2/2\,! + b^3/3\,! + \ldots)\, T\,(b) = 0.$$

Antes de pasar a definir el índice, debemos estudiar las propiedades de la función $1/z$ en un álgebra de Abel A.

Proposición 8.—*Sea A un álgebra de Abel;* Ω, *la región*

$$\varphi^{-1}\,(\mathbb{C} - \{\,0\,\}).$$

La aplicación $f : \Omega \to A$ *definida por ser* $f\,(z) = 1/z$, *es analítica en* Ω, *continua y holomorfa por tanto. Si* $a \in \Omega$, *su desarrollo en el entorno de* a *es*

$$f\,(z) = 1/a - (1/a^2)\,(z - a) + (1/a^3)\,(z - a)^2 - \ldots,$$

válido para

$$| \varphi (z - a) | < | \varphi (a) |.$$

Naturalmente, f está bien definida, pues si $a' a = 1$ y $a'' a = 1$, es $(a' - a'') a = 0$ y multiplicando por a' se obtiene $a' - a'' = 0$. Y si $a \in \Omega$ existe una a', pues $\varphi (a) \neq 0$.

El radio de la serie dada es $| \varphi (a) |$, puesto que si p es una seminorma, se tiene

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{p (1/a^n)} = p_0 (1/a) = | \varphi (1/a) | = 1/| \varphi (a)|$$

y basta aplicar la proposición 7 (cap. I).

Multiplicando la serie por $a + (z - a)$ se obtiene usando la proposición 8 (cap. I):

$$(a + (z - a)) ((1/a) - (1/a^2) (z - a) + (1/a^3) (z - a)^2 + \ldots) = 1.$$

Así, pues, la serie vale $1/z$ siempre que

$$| \varphi (- a) | < | \varphi (a) |.$$

De aquí se obtiene que f es analítica, proposición 13 (cap. I), continua por la proposición 14 (cap. I) y holomorfa por la proposición 16 (cap. I).

PROPOSICIÓN 9.—*Sea A un álgebra de Abel $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow A$ un arco diferenciable a trozos y cerrado;* a $\in A$, *un punto tal que para todo* t $\in [\alpha, \beta]$ *sea*

$$\varphi (a) \neq \varphi (\gamma (t)).$$

Entonces la integral

$$\int_\gamma 1/(z - a)\, d z$$

es un múltiplo entero de $2 \pi i$.

Puesto que $1/(z - a)$ es continua y el arco verifica

$$\varphi(\gamma(t)) \neq \varphi(a)$$

la integral está definida. Su valor es

$$\int_{\gamma} 1//(z - a)\, d\, z = \int_{\alpha}^{\beta} (\gamma(t) - a^{-1}\, \gamma'(t)\, d\, t.$$

La función

$$h(t) = \int_{\alpha}^{t} (\gamma(\tau) - a)^{-1}\, \gamma'(\tau)\, d\, \tau$$

es primitiva de

$$(\gamma(t) - a)^{-1}\, \gamma'(t).$$

Por tanto,

$$e^{-h(t)}\, (\gamma(t) - a)$$

es función continua en $[\alpha, \beta]$. Salvo en el número finito de puntos, donde γ no es derivable,

$$e^{-h(t)}\, (\gamma(t) - a)$$

lo es; su derivada vale

$$- e^{-h(t)}\, (\gamma(t) - a)^{-1}\, \gamma'(t)\, (\gamma(t) - a) + e^{-h(t)}\, \gamma'(t) = 0.$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo se obtiene que

$$e^{-h(t)}\, (\gamma(t) - a)$$

es constante:

$$e^{-h(\alpha)}\, (\gamma(\alpha) - a) = e^{-h(t)}\, (\gamma(t) - a).$$

Además

$$e^{-h(\alpha)} = e^{-0} = 1.$$

De aquí que como $\gamma(\alpha) - a$ es, por hipótesis, invertible,

$$e^{h(t)} = (\gamma(t) - a) / (\gamma(\alpha) - a).$$

Finalmente, como $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ es $_e h(\beta) = 1$. Aplicando la proposición 7 se tiene $h(\beta) = 2 k \pi i$ *para* algún entero k.

Bajo las condiciones de la proposición 9, llamaremos índice de γ respecto de a, y lo representaremos por $n(\gamma, a)$ al número entero

$$n(\gamma, a) = (1/2 \pi \mathrm{i}) \int_{\gamma} (z - a)^{-1} \, d z.$$

Para el cálculo de los índices es muy útil la siguiente proposición.

Proposición 10.—*Sea A un álgebra de Abel; $\gamma : [\alpha, \beta] \to A$, un arco diferenciable a trozos y cerrado;* $a \in A$, *tal que para* $t \in [\alpha, \beta]$ *sea* $\varphi(\gamma(t)) \neq \varphi(a)$. *Se tiene entonces*

$$\mathrm{n}(\gamma, \mathrm{a}) = \mathrm{n}(\varphi \circ \gamma, \varphi(\mathrm{a})).$$

En efecto, como $n(\gamma, a)$ es entero, se tiene:

$$n(\gamma, a) = \varphi(n(\gamma, a)) = (1/2 \pi i) \, \varphi \left(\int_{\gamma} (z - a)^{-1} \, d z \right) =$$

$$= (1/2 \pi i) \, \varphi \left(\int_{\alpha}^{\beta} (\gamma(t) - a)^{-1} \gamma'(t) \, d t \right) =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} (\varphi(\gamma(t)) - \varphi(a))^{-1} \, \varphi(\gamma'(t)) \, d t = n(\varphi \circ \gamma, \varphi(a)).$$

Son triviales algunas propiedades del índice. Por ejemplo, si $n(\gamma, a)$ está definido, también lo está

$$n(-\gamma, a) = -n(\gamma, a).$$

Si Δ es un disco en $\mathbb{C}$, tal que para todo t,

$$\varphi(\gamma(t)) \in \Delta \quad \text{y} \quad \varphi(a) \notin \Delta$$

se tiene $n(\gamma, a) = 0$.

Sea γ un arco diferenciable a trozos y cerrado en un álgebra de Abel A. Llamamos región determinado por γ a cada una de las regiones $\varphi^{-1}(G)$ en A, siendo G las componentes conexas en $\mathbb{C}$ del complemento de la imagen del arco $\varphi \circ \gamma$. Llamaremos región no acotada, determinada por γ, a $\varphi^{-1}(G)$, siendo G la región no acotada de la anteriormente citadas.

Si γ es un arco diferenciable a trozos y cerrado en A, y Ω una de las regiones determinadas por γ. Entonces $n(\gamma, z)$ es constante para $z \in \Omega$ y vale **0** si Ω es la región no acotada determinada por γ.

PROPOSICIÓN 11.—*Sea A un álgebra de Abel;* $\Omega = \varphi^{-1}(G)$, *una región convexa de A;* $f : \Omega \rightarrow A$, *holomorfa;* $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$, *un arco diferenciable a trozos y cerrado en* Ω; $a \in \Omega$, *tal que*

$$\varphi(\gamma(t)) \neq \varphi(a)$$

para $t \in [\alpha, \beta]$. *Entonces*

$$n(\gamma, a) f(a) = (1/2\pi i) \int_\gamma f(z)(z - a)^{-1} dz.$$

Consideremos la función

$$(f(z) - f(a))(z - a)^{-1}$$

definida en

$$\varphi^{-1}(G - \{\varphi(a)\}) = \Omega'$$

es holomorfa en Ω' y se tiene

$$\lim (z - a) F(z) = 0.$$

siendo F (z) el cociente incremental.

Como γ está en Ω', se tiene por la proposición 5:

$$(1/2\,\pi\,i)\int_{\gamma} (f(z) - f(a))\,(z-a)^{-1}\,d\,z = 0.$$

Así, pues,

$$(1/2\,\pi\,i)\int_{\gamma} f(z)\,(z-a)^{-1}\,d\,z = (1/2\,\pi\,i)\int_{\gamma} f(a)\,(z-a)^{-1}\,d\,z = f(a)\,n(\gamma, a).$$

Si Ω_0 es una de las regiones determinadas por γ y tales que $n(\gamma, a) = 1$ si $a \in \Omega_0$. Se tiene

$$f(z) = (1/2\,\pi\,i)\int_{\gamma} f(\zeta)\,(\zeta - z)\,d\,\zeta,$$

para $z \in \Omega_0$. En particular esto ocurre si γ es una circunferencia.

La consecuencia más importante de este resultado es la demostración de la proposición 17 del capítulo I.

Proposición 12.—*Sea G una región de* $\mathbb{C}$; $\Omega = \varphi^{-1}(G)$ *la región correspondiente en el álgebra de Abel A;* $\mathrm{f} : \Omega \to A$, *una función holomorfa y* $\mathrm{a} \in \Omega$. *Entonces puede representarse* f *por una serie de potencias en el entorno de* a:

$$\mathrm{f}(\mathrm{z}) = \Sigma\, \mathrm{a}_n\,(\mathrm{z} - \mathrm{a})^n,$$

cuyo radio es mayor o igual a

$$\mathrm{d}\,(\varphi(\mathrm{a}), \complement\, G),$$

y que coincide con f *en el disco de radio*

$$\mathrm{d}\,(\varphi(\mathrm{a}), \complement\, G).$$

Obsérvese que con esto se demuestra también definitivamente la proposición 12. Aunque puede parecer que ya hemos formado un círculo, pues la proposición 12 la hemos usado al probar la proposición 7 y ésta para la fórmula de la integral de Cauchy. Pero debe tenerse en cuenta que la proposición 12 es trivial para la función exponencial.

Sea $b \in \Omega$ tal que

$$|\varphi(b) - \varphi(a)| < d(\varphi(a), \complement G).$$

Tomemos un r entre estos dos números y sea γ el arco

$$a + r e^{2\pi i t}$$

para $t \in [0, 1]$. Se tiene

$$f(z) = (1/2\pi i) \int_\gamma f(\zeta)(\zeta - z)^{-1} d\zeta,$$

cuando

$$|\varphi(z) - \varphi(a)| < r$$

por la proposición 11.

Pero

$$1/(\zeta - z) = 1/((\zeta - a) - (z - a)) = \sum (-1)^n \frac{(\zeta - a)^{n+1}}{(z - a)^n}$$

uniformemente en ζ para a y z fijos. Basta tener en cuenta que sólo consideramos los puntos de la forma

$$\zeta = a + r e^{2\pi i t},$$

donde la serie es

$$\Sigma (-1)^n r^{-(n+1)} e^{-2\pi i (n+1) t} (z - a)^n,$$

que es una serie de potencia de radio

$$r / |\varphi(z) - \varphi(a)| > 1;$$

tomada en $e^{2\pi i t}$ de módulo unidad y usar la proposición 11 (cap. I).

Al multiplicar esta serie por $f(\zeta)$ se obtiene una serie que converge uniformemente, pues f es continua en compactos.

Podemos entonces integrar término a término y se obtiene

$$f(z) = \sum (1/2\pi i) \int_{\gamma} (-1)^n \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} f(\zeta)\, d\zeta = \sum a_n (z-a)^n$$

donde

$$a_n = (1/2\pi i)(-1)^n \int_{\gamma} f(\zeta)(\zeta - a)^{-(n+1)}\, d\zeta.$$

El desarrollo obtenido para $f(z)$ vale en b por tanto para todo z del disco de centro $\varphi(a)$ y radio

$$d(\varphi(a), \complement G)$$

ya que los coeficientes dados a_n no pueden de hecho depender de r, ya que son las diferenciales sucesivas de f *que son únicas*.

Otra consecuencia importante de este resultado es el teorema de Morera.

PROPOSICIÓN 13.—*Sea* Ω *una región de un álgebra de Abel* A; $f : \Omega \to A$, *tal que para todo arco diferenciable a trozos y cerrado* γ *en* Ω *se tenga*

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = 0.$$

Entonces f *es analítica en* Ω.

Por la proposición 1, f es la diferencial de una función holomorfa F. Por la proposición 12, F es analítica, luego lo es f.

BIBLIOGRAFÍA

ARIAS DE REYNA, J.: *Diferenciación en espacios vectoriales topológicos*. Tesis doctoral. Sevilla (1973).

— — *Prolongación de seminormas multiplicativas*. Comunicación presentada en las II Jornadas matemáticas Hispano-Lusitanas (1973).

BOURBAKI: *Topologie générale*. Chap. 2 y 3, tercera edición, Hermann, París.
— — *Topologie génénrale*. Chap. 9, Hermann, París.
— — *Algèbre commutative*. Chap. 1 a 7, Hermann, París.
CARTAN, H.: *Seminaire Henri Cartan 1951-52, 1953-54*. W. A. Benjamin, Inc. (1967).
MICHAEL, E. A.: *Locally multiplicatively-convex topological algebras*. «Memoirs of the Amer. Math. Soc.», number 11. Providence R. I. (1952).
RICKART, C.: *General theory of Banach Algebras*. D. Van Nostrand, New-York (1960).
RAYNAUD, M.: *Anneaux Locaux Henséliens*. «Lecture Notes», número 169, Springer Verlag (1970).